С. В. Распопов Н. С. Николаенко Ю. А. Гурвич

Белорусский национальный технический университет

Колебания системы двух грузов на гладкой горизонтальной поверхности

Целью данной работы является: составление дифференциальных уравнений движения каждого груза в отдельности с использованием второго закона динамики для материальной точки, их решение при различных начальных условиях движения, анализ полученных уравнений движения каждого груза и системы в целом.

Рассмотрим движение простейшей механической системы, состоящей из двух грузов массами m1 и m2, связанных между собой пружиной с коэффициентом жесткости *c* и длинной *l* в недеформированном состоянии, находящихся на гладкой горизонтальной плоскости (рис.1).

Рис.1

Пусть в некоторый момент времени при движении грузов их положение определяется координатами x1 и x2. На грузы со стороны пружины действуют сила упругости Fупр= -Fупр, приложенные соответственно к грузам 1 и 2.Для системы двух грузов эти силы являются внутренними и в зависимости от начальных условий движения грузов в соответствии с теоремой о движении центра масс системы проекция центра масс системы на ось Ох либо будет покоиться, либо двигаться с некоторой начальной скоростью, так как проекция главного вектора внешних сил на ось x равна нулю. Однако эти внутренние силы будут вызывать перемещения грузов.

Составим дифференциальные уравнения движения этих грузов под действием сил упругости в проекции на ось Ох;

$$_{1\,1} = F_{упр} = c(x_2\text{-}x_1\text{-}l); \qquad (1)$$

$$_2 = \text{-}F' = \text{-}c(x_2\text{-}x_1\text{-}l) \qquad (2)$$

Сложим уравнения (1) и (2), получим;

$$_{1\,1} + {}_2 \qquad (3)$$

Проинтегрируем дважды уравнение (3), выразив предварительно $_1$

$_1$= - ; $_1$= - + C_1; $_1$= - + C_1t +C_2; (5)

Подставим (5) в уравнение (2) и преобразуем

$$_2 = \text{-}cx_2(1+)+ t+cC_2+cl; \qquad (6)$$

Подставим уравнение (6) в виде

$$x= + ; \qquad (7)$$

Обозначим

$$=k^2; \ =A; \ =B; \qquad (8)$$

С учетом (8) уравнение (7) принимает вид:

$$+k^2x_2=At + B; \qquad (9)$$

Получили неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

Его общее решение:

x_2= + x_2*, где — общее решение однородного уравнения.

$$x_2= C_3coskt + C_4sinkt; \qquad (10)$$

x_2*— частное решение неоднородного уравнения. Его решение будем искать в виде правой части уравнения

$$x_2^*=C_5t+C_6; \qquad (11)$$

Тогда $x_2^*=0$; Подставим x_2^* и (11) в уравнение (8), получим;

$$k^2(C_5t + C_6)=At + B \qquad (12)$$

Из уравнения (12) с учетом (8) определим C_5 и C_6

$$C_5===C_1;$$

$$C_6===(C_2 + l); \qquad (13)$$

С учетом (10), (11) и (13) общее решение уравнения (9) примет вид:

$$x_2= C_3coskt + C_4sinkt\, t\; t + . \qquad (14)$$

Тогда уравнение (5) с учетом (14) представим в виде:

$$x_1= -\ C_3\ coskt - C_4\ sinkt + t + t - . \qquad (15)$$

Уравнение (14) и (15) описывают в общем случае движение соответственно второго и первого грузов.

Так как движение второго груза зависит от движения первого, то определим C_1, C_2,C_3, C_4 при различных начальных условиях движения первого груза, приняв начальные условия движения второго груза для всех случаев неизменными.